M Tangenten an Funktionsgraphen

Was ist eine Tangente?

Eine Tangente ist eine besondere Gerade, die einen Funktionsgraphen in einem bestimmten Punkt **berührt** – ohne ihn dabei zu *schneiden*. Sie liegt dabei so an den Graphen an, dass sie denselben Verlauf hat wie die Kurve an genau dieser Stelle.

Erklärung: Tangente

Eine **Tangente** an den Graphen einer Funktion f im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ ist eine Gerade, die den Graphen in P **berührt**. Sie beschreibt die **Steigung** des Graphen an dieser Stelle.

Tipp: Tangente mit dem Geodreieck zeichnen

Lege das Geodreieck so an den Punkt P, dass der Abstand zwischen Geodreieck und Funktionsgraph **links und rechts des Punktes** möglichst gleich aussieht. Dann zeichne die Tangente als Gerade durch diesen Punkt.

Σ Das Steigungsdreieck

Um die **Steigung der Tangente** abzulesen, verwendet man das **Steigungsdreieck**: Man wählt zwei gut ablesbare Punkte auf der Tangente und bildet das Verhältnis aus der *vertikalen* Strecke Δy zur *horizontalen* Strecke Δx.

Σ Formel: Steigung der Tangente

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Strecke in } y\text{-Richtung}}{\text{Strecke in } x\text{-Richtung}}}$$

Dabei gilt für zwei Punkte $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$ auf der Tangente:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \text{und} \qquad \Delta y = y_2 - y_1$$

⚠ Merke!

- $m > 0$: Tangente **steigt** $\nearrow$ (Kurve steigt an dieser Stelle)
- $m < 0$: Tangente **fällt** $\searrow$ (Kurve fällt an dieser Stelle)
- $m = 0$: Tangente **waagerecht** $\rightarrow$ (möglicher Hoch- oder Tiefpunkt)

Achtung: Fällt die Tangente von links nach rechts, ist Δy negativ, also auch $m < 0$.

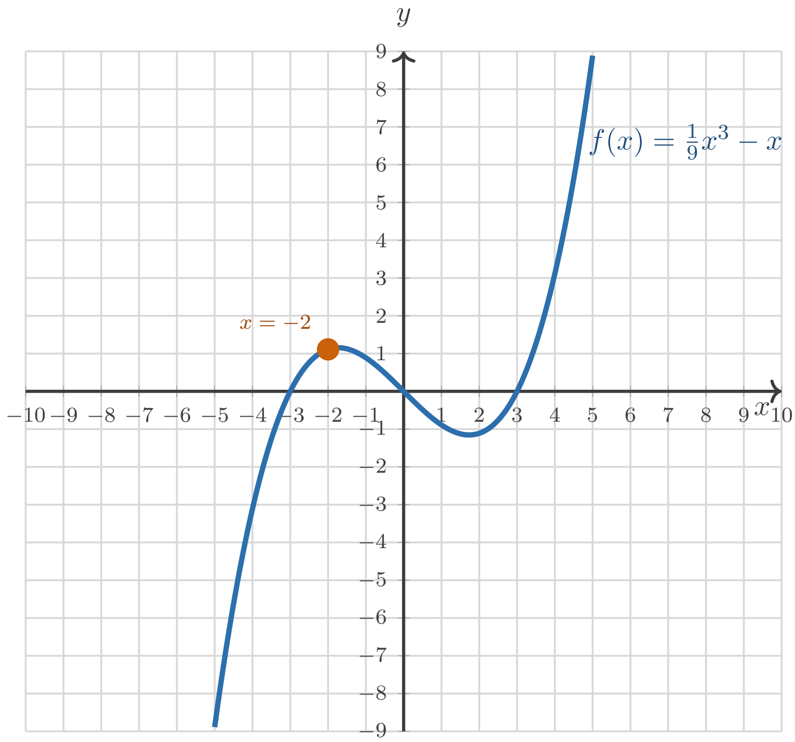
Beispiele mit Musterlösung

Die folgenden zwei Beispiele stammen direkt aus dem Video.

Beispiel 1 – Punkt an der Stelle $x = -2$

Aufgabe: Tangente zeichnen und Steigung bestimmen

1 Gegeben ist der Funktionsgraph von $f(x) = \dfrac{1}{9}x^3 - x$. Bestimme die Steigung des Graphen an der Stelle $x = -2$, indem du dort eine Tangente einzeichnest und das Steigungsdreieck abließt.



Lösung: Beispiel 1

Schritt 1: Tangente anlegen
Das Geodreieck so an die Stelle $x = -2$ legen, dass der Abstand zwischen Lineal und Kurve links und rechts des Punktes ungefähr gleich groß ist. Dann die Tangente als Gerade einzeichnen.

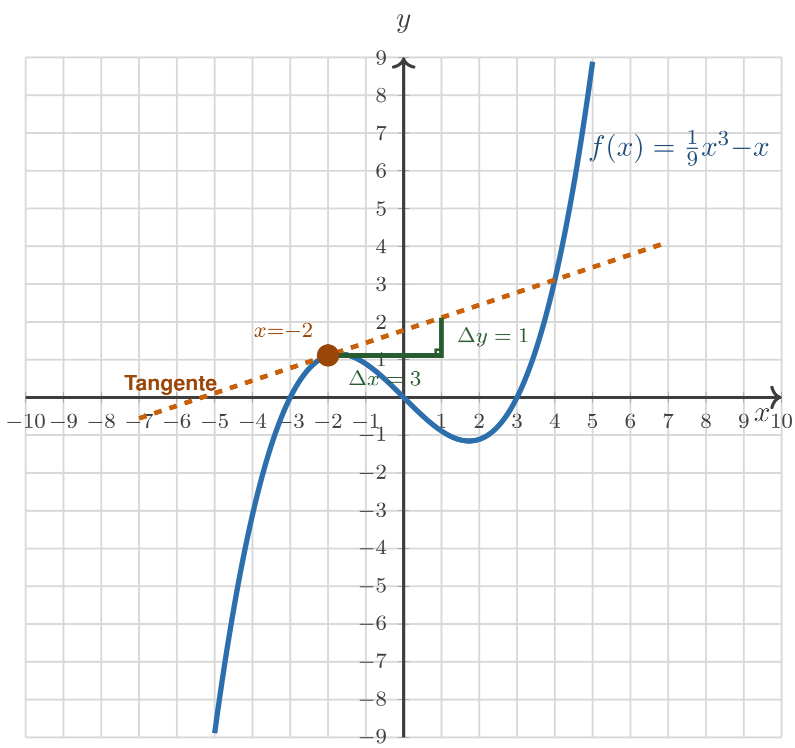
Schritt 2: Steigungsdreieck
Von einem Punkt auf der Tangente **3 Schritte nach rechts** und dann schauen, wie viele Schritte nach oben: **1 Schritt**.

Schritt 3: Steigung berechnen

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$$

Die Steigung des Graphen an der Stelle $x = -2$ beträgt $m = \dfrac{1}{3}$.

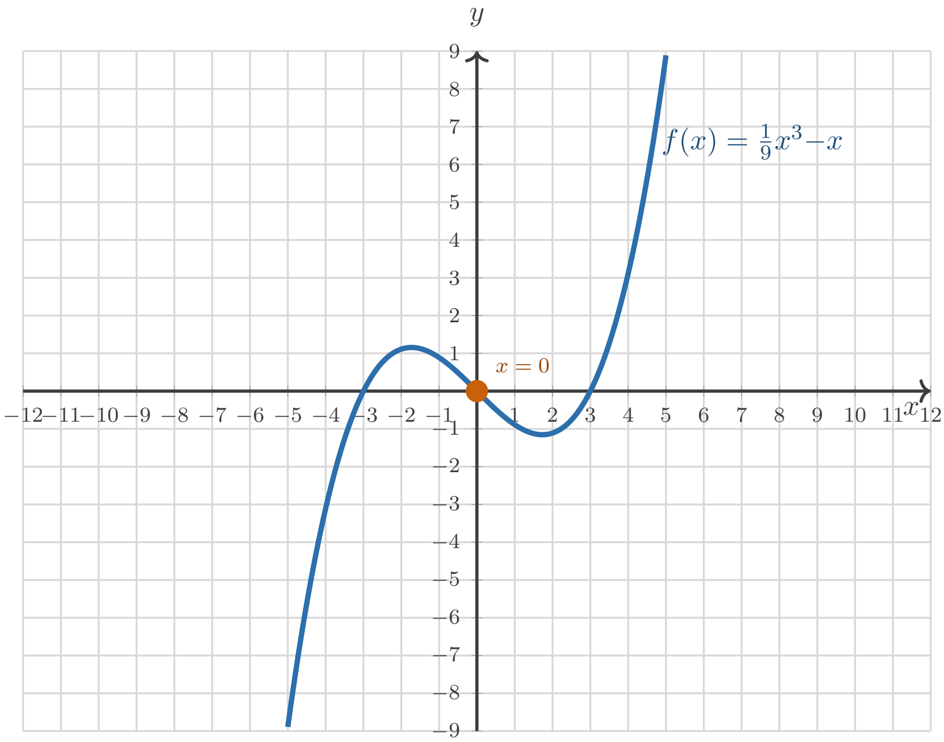
Musterlösung Beispiel 1:



Beispiel 2 – Punkt an der Stelle $x = 0$

Aufgabe: Negative Steigung ablesen

2 Gegeben ist derselbe Funktionsgraph $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x$. Bestimme die Steigung an der Stelle $x = 0$ mithilfe einer Tangente und des Steigungsdreiecks.
Achtung: Zeigt die Tangente nach unten? Dann ist m negativ!



Lösung: Beispiel 2

Schritt 1: Tangente anlegen
Geodreieck an die Stelle $x = 0$ legen. Da der Ursprung ein *Sattelpunkt-ähnlicher* Bereich ist, darauf achten, dass die Abstände zum Graphen links und rechts des Punktes ungefähr gleich sind. Die Tangente zeigt nach rechts **unten**.

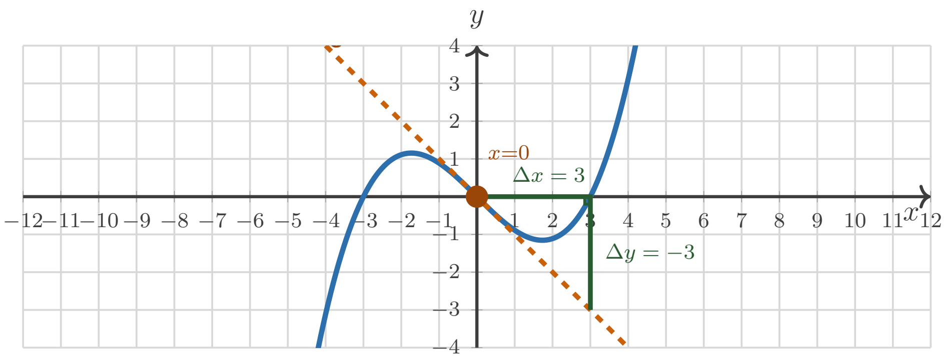
Schritt 2: Steigungsdreieck
3 Schritte nach rechts, dann messen: **3 Schritte nach unten** (die Tangente fällt also – Δy ist negativ!).

Schritt 3: Steigung berechnen

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{3} = -1$$

Die Steigung des Graphen an der Stelle $x = 0$ beträgt $m = -1$. Die Tangente **fällt** – der Graph hat an dieser Stelle eine **negative Steigung**.

Musterlösung Beispiel 2:



Übungsaufgaben

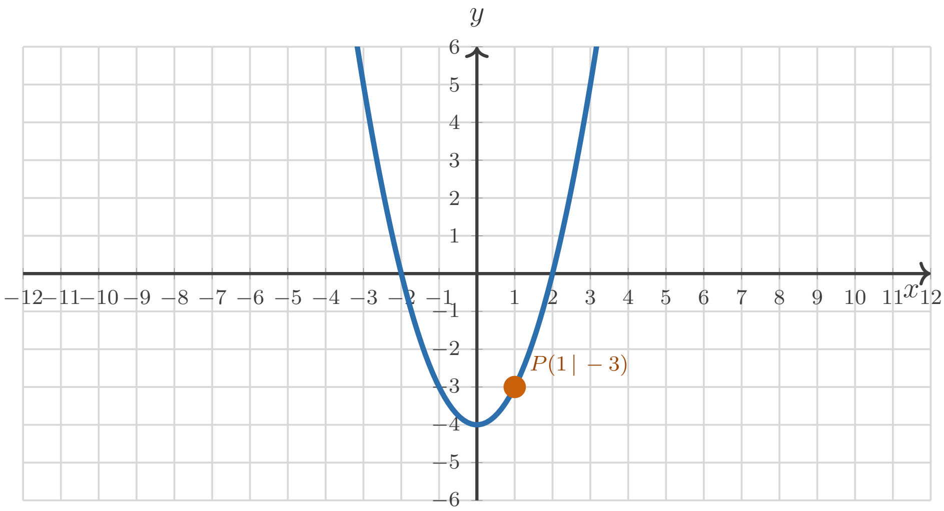
Aufgabe: Tangente an eine Parabel

3 Der Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 4$ ist unten abgebildet.

a) Zeichne die Tangente an den Graphen im Punkt $P(1 \mid -3)$.

b) Trage das Steigungsdreieck ein und bestimme die Steigung m.

c) Ist die Steigung positiv oder negativ? Was bedeutet das für den Graphen?



Steigung: $m =$ ____________ positiv / negativ (bitte einkreisen)

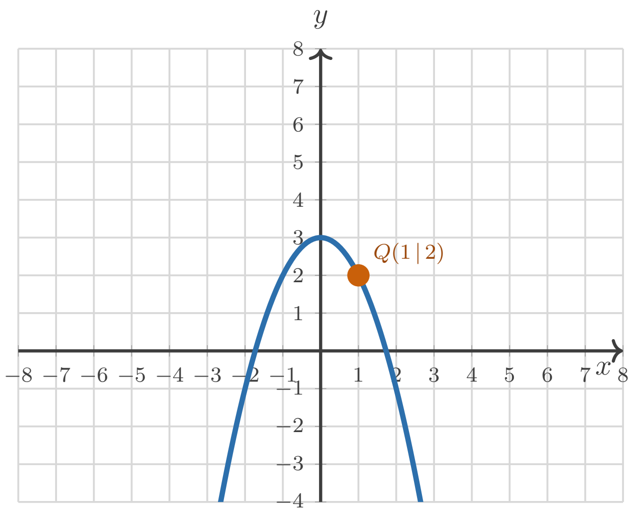
Aufgabe: Tangente an eine fallende Parabel

4 Gegeben ist der Graph der Funktion $g(x) = -x^2 + 3$.

a) Zeichne die Tangente an den Graphen im Punkt $Q(1 \mid 2)$.

b) Trage das Steigungsdreieck ein. Achte darauf: Zeigt Δy nach **unten**?

c) Bestimme die Steigung m und erkläre ihr Vorzeichen.



Steigung: $m =$ ____________ positiv / negativ (bitte einkreisen)

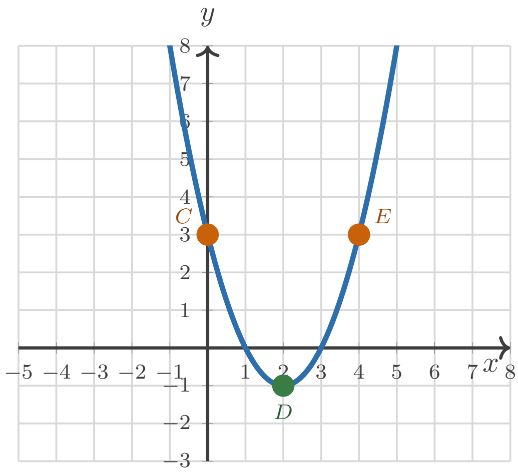
Aufgabe: Waagerechte Tangente finden

5 Gegeben ist die Funktion $p(x) = x^2 - 4x + 3$.

a) Zeichne Tangenten an die Punkte $C(0\,|\,3)$, $D(2\,|\,-1)$ und $E(4\,|\,3)$.

b) Bestimme die Steigung jeweils mithilfe des Steigungsdreiecks.

c) An welchem der drei Punkte hat die Tangente die Steigung $m = 0$? Was bedeutet das?



$m_C =$ ________ $m_D =$ ________ $m_E =$ ________

Beobachtung zu c)

Aufgabe: Herausforderung: Zwei Tangenten vergleichen

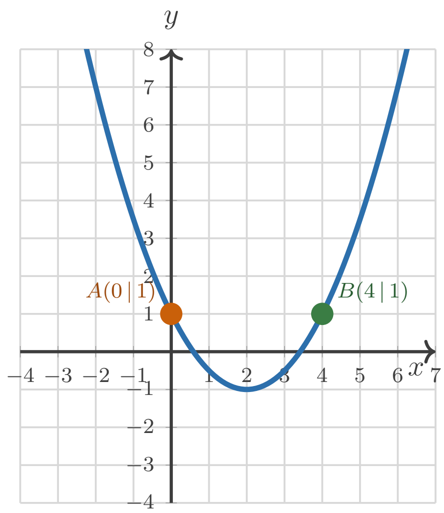
6 Die Funktion $k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ hat einen Tiefpunkt.

a) Zeichne die Tangente im Punkt $A(0 \mid 1)$. Bestimme die Steigung m_A.

b) Zeichne die Tangente im Punkt $B(4 \mid 1)$. Bestimme die Steigung m_B.

c) Vergleiche m_A und m_B. Was fällt dir auf?

d) An welcher Stelle zwischen A und B hat die Tangente die Steigung $m = 0$? Wie nennt man diesen Punkt?



Tangente in A: $m_A =$ ____________   Tangente in B: $m_B =$ ____________

Beobachtung und Begründung zu c) und d)

Musterlösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung: Aufgabe 3: Tangente an eine Parabel

Schritt 1: Tangente anlegen
Das Geodreieck an den Punkt $P(1\,|\,-3)$ anlegen. Da $f(x) = x^2 - 4$ an dieser Stelle steigt, zeigt die Tangente nach rechts oben.

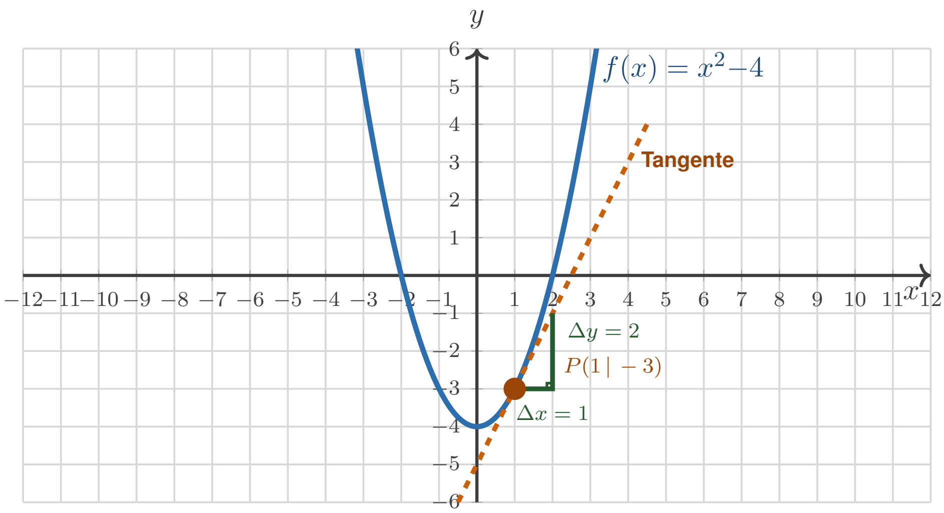
Schritt 2: Steigungsdreieck
1 Schritt nach rechts, dann **2 Schritte nach oben**: $\Delta x = 1,\ \Delta y = 2$.

Schritt 3: Steigung berechnen

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$$

Die Steigung ist **positiv**: Der Graph **steigt** an der Stelle $x = 1$.

Musterlösung Aufgabe 3:



Lösung: Aufgabe 4: Tangente an eine fallende Parabel

Schritt 1: Tangente anlegen
Das Geodreieck an den Punkt $Q(1\,|\,2)$ anlegen. Der Graph $g(x) = -x^2 + 3$ **fällt** an dieser Stelle – die Tangente zeigt nach rechts **unten**.

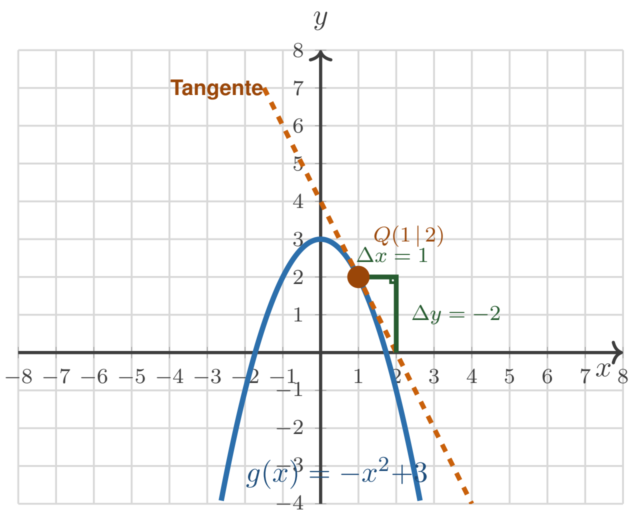
Schritt 2: Steigungsdreieck
1 Schritt nach rechts, dann **2 Schritte nach unten**: $\Delta x = 1,\ \Delta y = -2$.

Schritt 3: Steigung berechnen

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{1} = -2$$

Die Steigung ist **negativ**: Der Graph **fällt** an der Stelle $x = 1$.

Musterlösung Aufgabe 4:



Lösung: Aufgabe 5: Waagerechte Tangente finden

Tangente in $C(0\,|\,3)$:
$\Delta x = 1,\ \Delta y = -4$

$$m_C = \frac{-4}{1} = -4$$

Tangente **fällt**.

Tangente in $D(2\,|\,-1)$:
$\Delta x = 1,\ \Delta y = 0$

$$m_D = \frac{0}{1} = 0$$

Tangente **waagerecht**.

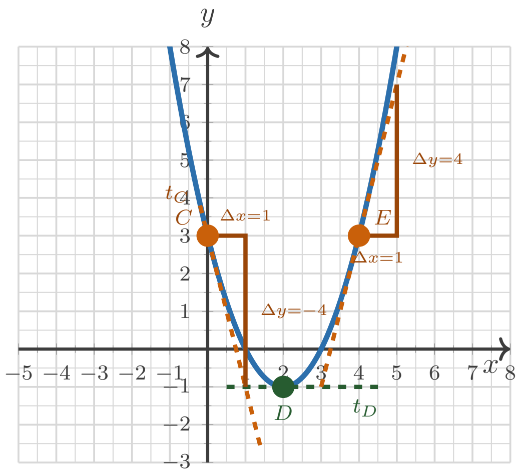
Tangente in $E(4\,|\,3)$:
$\Delta x = 1,\ \Delta y = 4$

$$m_E = \frac{4}{1} = 4$$

Tangente **steigt**.

Beobachtung zu c): Bei Punkt $D(2\,|\,-1)$ hat die Tangente die Steigung $m_D = 0$ – sie liegt **waagerecht**. Das bedeutet: D ist der **Tiefpunkt** (Minimum) des Graphen.

Musterlösung Aufgabe 5:



Lösung: Aufgabe 6: Zwei Tangenten vergleichen

Schritt 1 – Steigungen bestimmen:

Tangente in $A(0\,|\,1)$**:**
$\Delta x = 1,\ \Delta y = -2$

$$m_A = \frac{-2}{1} = -2$$

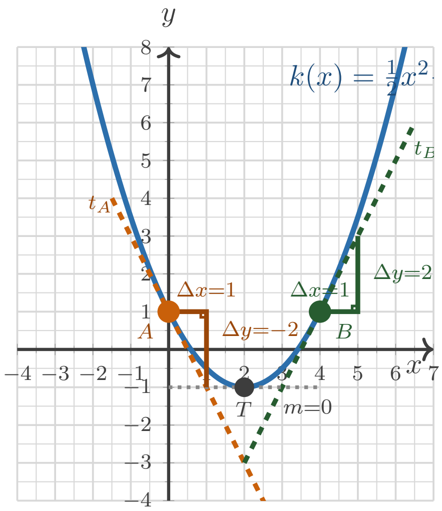
Tangente in $B(4\,|\,1)$**:**
$\Delta x = 1,\ \Delta y = 2$

$$m_B = \frac{2}{1} = 2$$

Schritt 2 – Vergleich c):
$m_A = -2$ und $m_B = 2$ sind **entgegengesetzt gleich**: $m_B = -m_A$. Die Tangenten in A und B sind zueinander **spiegelsymmetrisch** bezüglich der Achse $x = 2$ (der Symmetrieachse der Parabel).

Schritt 3 – Tiefpunkt d):
Zwischen A und B hat die Tangente bei $x = 2$ die Steigung $m = 0$ (waagerecht). Dort liegt der **Tiefpunkt** (Minimum) $T(2\,|\,-1)$.

Musterlösung Aufgabe 6:



Viel Erfolg beim Zeichnen und Üben!